

LA RELATIVIDAD GENERALIZADA

Por: Fís. Dinápoles Soto Bello.

AL LECTOR

Pretendemos en este artículo mostrar, con la mayor claridad que nos sea posible, la línea lógica seguida en la construcción de la Relatividad Generalizada, así como indicar los detalles principales relativos a tres de las verificaciones experimentales de esa teoría física.

Este artículo se sitúa, aunque no lo parezca, al nivel de un estudiante universitario dominicano con conocimientos generales de Física, Matemática y Relatividad Restringida.

Como regla general de lectura, no hay porqué preocuparse por aquellas expresiones matemáticas que no se comprendan "matemáticamente". Lo que importa siempre es el significado físico de esas expresiones.

Las referencias bibliográficas se harán del siguiente modo:  $(B_1)$ ,  $(B_2)$ ,  $(B_3)$ , etc...

Buena suerte, amigo lector.

El Principio de Relatividad exige, tanto en la Física Clásica como en la Relativista, que las leyes físicas tengan la misma forma en dos sistemas de referencia correlacionados por ecuaciones de transformación de uno al otro.

Ese Principio se conoce en la Física Clásica como Principio de Relatividad de Galileo y se cumple para sistemas de referencia a velocidad relativa constante (iniciales) y para tiempo y espacio absolutos, pudiendo pasar de uno de los referenciales al otro mediante las ecuaciones de transformación de Galileo.

En la Física Relativista ese Principio toma el nombre de Principio de Relatividad Restringida, válido para sistemas inerciales pero con tiempo y espacio relativos, pudiendo pasar de un sistema a otro mediante las ecuaciones de transformación de Lorentz.

Si en el marco de la Física Relativista, las variables  $A, B, C$  de un suceso visto en el referencial inercial  $S$  están relacionadas por la ley física

$$f(A, B, C) = 0$$

el principio de Relatividad Restringida establece que esas mismas variables observadas en el referencial inercial  $S'$ , y denotadas  $A', B', C'$ , están relacionadas por la ley

$$f'(A', B', C') = 0$$

es decir una ley de la misma forma matemática que la primera (lo que se expresa diciendo que la ley física es covariante). La transformación de Lorentz permite pasar de  $A$  a  $A'$ , de  $B$  a  $B'$ , de  $C$  a  $C'$ , etc.

La exigencia del Principio de Relatividad se cumple muy bien para los sistemas inerciales (con una muy extraña excepción) pero deja de ser válido para los no-inerciales (sistemas acelerados). Para dos observadores, uno en movimiento uniforme y el otro en movimiento acelerado, la ley física de un fenómeno natural determinado no tiene la misma forma matemática.

Esta invalidez del Principio de Relatividad para los sistemas acelerados contrarió profundamente a Einstein. ¿Porqué las leyes de la Naturaleza no son válidas para todos los sistemas de referencia, sean estos inerciales o no?. Esta inquietud fundamental está en el origen de la Relatividad Generalizada.

Pero, ¿cómo será posible hacer que el Principio de Relatividad sea también válido para referenciales no inerciales?. Este fue el gran reto que tuvo que afrontar Einstein.

La primera pista surge al éste darse cuenta de que un sistema acelerado es equivalente a un sistema en reposo con la condición de que introduzcamos en el sistema un campo gravitatorio cuyas características son función de la aceleración del sistema. Esa equivalencia es posible gracias a la igualdad de las masas inerte y gravitatoria. Veamos esto más detenidamente. Colocando el cuerpo C sobre una mesa sin rozamiento y aplicándole una tracción constante F (mediante resorte o cuerda por ejemplo) el cuerpo se moverá con la aceleración constante  $\underline{a}$ . La masa inercial  $m_i$  del cuerpo C se define como siendo inversamente proporcional a la aceleración  $\underline{a}$ ,

$$m_i \propto \frac{1}{\underline{a}}$$

confundiéndose la constante de proporcionalidad, según la segunda ley de Newton, con la tracción  $F$ . Así pues

$$m_i = \frac{F}{a}$$

Pero coloquemos el cuerpo  $C$  en el campo gravitatorio cercano a la superficie de la tierra. Ese cuerpo experimenta una atracción hacia ésta debido a que tiene "sensibilidad" gravitatoria. Experimentando con otros cuerpos de idéntica materia que  $C$  pero de volúmenes doble, triple, cuádruple, etc. podemos establecer que las atracciones son doble, triple, cuádruple, etc. de la atracción sobre  $C$ . Es decir: la "sensibilidad" gravitatoria\* (denotémosla  $S$ ) es proporcional a la atracción gravitatoria  $F_g$ ,

$$(1) \quad F_g = KS$$

siendo  $K$  común a todos los cuerpos.

Pero sabemos ya que  $C$  tiene la masa inercial  $m_i$  y que al soltarlo en el campo gravitatorio de la Tierra se mueve con aceleración constante  $g$  (aceleración de la gravedad  $\approx 9.8\text{m}/\text{seg}^2$ ) bajo la acción de la atracción gravitatoria  $F_g$ . Por tanto

$$(2) \quad m_i = \frac{F_g}{g}$$

y por comparación de (1) y (2),

$$KS = m_i g$$

$$(3) \quad \therefore S = \left(\frac{g}{K}\right) m_i$$

expresión que significa que la "sensibilidad" gravitatoria es proporcional a la masa inercial para todo tipo de cuerpo ya que la constante de proporcionalidad  $g/K$  es la misma para cualquier cuer-

---

\* Un volumen doble tiene doble "sensibilidad" gravitatoria  
Un volumen triple tiene triple "sensibilidad" gravitatoria

po, cual sea su naturaleza. A esta "sensibilidad" gravitatoria es a lo que se le llama masa gravitatoria y con una elección conveniente de la unidad de masa puede lograrse  $K = 1$ , lo que permite decir entonces que las masas gravitatoria e inercial de un cuerpo cualquiera son iguales.

Establecida esta igualdad podemos explicarnos lo que sigue. Colocando varios cuerpos  $C_i$  sobre una plataforma sin rozamiento, al moverse ésta con la aceleración  $-\vec{a}$  (fig. 1)

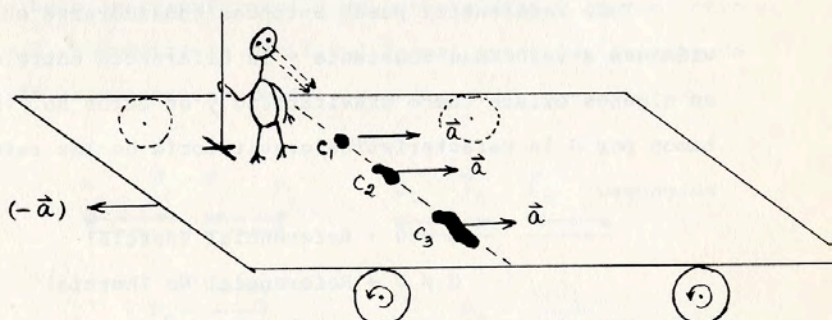


Fig. 1

un observador sujeto encima de ella verá a todos los cuerpos  $C_i$  moverse con la misma aceleración  $\vec{a}$ , independientemente de las masas inerciales  $m_i$  tal como sucede en un campo gravitatorio constante (como el de las proximidades de la superficie terrestre, por ejemplo). Esta independencia la podemos ver más claramente abordando (3) desde otro ángulo. Despejando la aceleración de la gravedad,

$$g = K \left( \frac{S}{m_i} \right)$$

esta expresión nos dice que esa aceleración gravitatoria sólo puede ser constante si existe una proporcionalidad entre las masas

gravitatoria e inercial.

Los cuerpos  $C_i$  sobre la plataforma de la fig.1 se comportan pues como si sobre ellos actuara un campo gravitatorio constante, lo que nos permite suponer la plataforma en reposo (o velocidad constante) pero a condición de introducir un campo gravitatorio de aceleración  $\vec{a}$ . Este es el famoso "Principio de Equivalencia" de la Relatividad Generalizada (sistema acelerado equivale a campo gravitatorio).

Todo referencial puede entonces considerarse en reposo o moviéndose a velocidad constante y la diferencia entre ellos es que en algunos existe campo gravitatorio y en otros no. Si representamos por  $G$  la característica gravitatoria de los referenciales entonces

$$G = 0 \rightarrow \text{Referencial Inercial}$$

$$G \neq 0 \rightarrow \text{Referencial No Inercial}$$

Como todos los referenciales pueden considerarse moviéndose a velocidad constante (para cualquier  $G$ ) estamos tentados de aceptar que la transformación de Lorentz es válida para pasar de uno a otro. Pero un hecho nos desconcierta: la ley de gravitación universal de Newton no cumple con el Principio de Relatividad. La aceleración gravitatoria que para un observador  $S$  en reposo produce una masa  $m$  a la distancia  $r$  es

$$(4) \quad g = \frac{G_N M}{r^2}$$

( $G_N$ , constante de la gravitación universal) y la que produce para un observador  $S'$  moviéndose a velocidad constante  $\vec{u}$  es (para ciertas condiciones iniciales)

$$g' = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{5/2} \cdot \frac{G_N M'}{r'^2}$$

expresión de forma matemática distinta a la anterior. Bajo la transformación de Lorentz, pues, la ley de gravitación universal no es covariante.

Este hecho es particularmente chocante cuando constatamos ciertas similitudes formales entre los campos gravitatorio y electromagnético y, a pesar de ellas, las leyes de este campo son covariantes bajo la transformación de Lorentz (TL) y las del otro no. En la fig.2 se muestra la similitud formal entre las fuerzas de interacción gravitatoria y eléctrica.

$$F_G \propto \frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad F_E \propto \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$$

Fig. 2

De la expresión de  $F_G$  (fig.2) se pasa a la llamada ecuación de Poisson, donde aparecen el potencial y la densidad de carga eléctricos ( $V_E, \rho_E$ ):

$$(5) \qquad \Delta V_E = -4\pi K \rho_E$$

La manera de hacer covariante bajo la T. de L.\* las leyes electromagnéticas consiste en reemplazar  $\Delta$ ,  $V_E$  y  $\rho_E$  por cuadrivectores

\* T.de L.  $\equiv$  Transformación de Lorentz

$$\begin{aligned} \Delta &\rightarrow \square && \text{(cuadrinabla)} \\ V_E &\rightarrow \Phi_\mu^{(E)} && \text{(cuadripotencial electromagnético)} \\ \rho_E &\rightarrow J_\mu^{(E)} && \text{(cuadridensidad)} \end{aligned}$$

La (5) se convierte entonces, en

$$(6) \quad \square \phi_\mu^{(E)} = -\mu_0 J_\mu^{(E)}$$

expresión covariante bajo la T. de L. La cuadridensidad  $J_\mu^{(E)}$  debe cumplir además con

$$(7) \quad \partial_\mu J_\mu^{(E)} = 0$$

expresión de la conservación de la carga eléctrica.

Es natural entonces que se piense en hacer algo análogo con el campo gravitatorio con la finalidad de lograr la covariancia bajo la T. de L. partiendo de la ecuación de Poisson para el potencial y la densidad de masa gravitatorias,

$$(8) \quad \Delta V_G = -4\pi G_N \rho_G$$

Pero surge una dificultad: no podemos reemplazar  $\rho_G$  por un cuadvivector  $J_\mu^{(G)}$  porque  $\rho_G$  es de naturaleza tensorial (B3). Entonces se intenta construir para el campo gravitatorio ecuaciones similares a las (6) y (7) pero suponiendo el potencial gravitatorio  $V_G$  de Naturaleza tensorial. Así, pues, se hacen en (8) las sustituciones siguientes:

$$V_G \rightarrow \phi_{\mu\nu}$$

$$\rho_G \rightarrow T_{\mu\nu}$$

$$\Delta \rightarrow \square$$

y obtenemos para el campo gravitatorio el sistema



$$(9) \quad \square \phi_{\mu\nu} = -\frac{4G}{c^2} T_{\mu\nu}$$

$$(10) \quad \partial^\mu T_{\mu\nu} = 0$$

donde la última ecuación expresa la conservación de la masa-energía. Las (9) y (10) se refieren a referenciales a velocidad constante con la T. de L. para pasar de uno a otro. Sin embargo, otra dificultad nos sale al paso. Al aplicar (10) al movimiento de una partícula aislada en un campo gravitatorio obtenemos una aceleración nula para ella lo cuál es imposible por la existencia del campo gravitatorio, el cual acelera necesariamente la partícula. Según ese resultado, la partícula se mueve a lo largo de "rectas" pertenecientes al espacio de Minkowski, el cual es euclídeo, es decir, sin curvatura.

En esta situación embarazosa Einstein tiene una ocurrencia nada común: cambiar de espacio, eligiendo el espacio curvo de Riemann por su simplicidad. Ese cambio lo hacemos simbólicamente mediante la sustitución del operador  $\partial^\mu$  por  $\nabla^\mu$  con lo que la (10) se convierte en

$$(11) \quad \nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$$

La ecuación tensorial de la trayectoria de una partícula en un campo gravitatorio, sea en el espacio de Minkowski o en el de Riemann,

$$\text{es} \quad \frac{d^2 x^\nu}{ds^2} = -\left\{ \begin{matrix} \nu \\ \tau \sigma \end{matrix} \right\} \frac{dx^\tau}{ds} \cdot \frac{dx^\sigma}{ds}$$

donde el primer miembro es la aceleración. En el espacio de Minkowski los coeficientes

$$\left\{ \begin{matrix} \nu \\ \tau \sigma \end{matrix} \right\}$$

son nulos para el caso estudiado, por lo que la aceleración resulta nula, sin serlo realmente. Pero esos coeficientes no son nulos en

en el espacio de Riemann y su no nulidad acusa la presencia del campo gravitatorio. (B3).

El abandono del espacio de Minkowski trae consigo el abandono de la T. de L. Esta transformación no será, pues, válida para pasar de sistemas inerciales a no-inerciales. La transformación que se necesita ahora no es lineal pero asegura el cumplimiento del Principio de Relatividad Generalizada el cual se enuncia así (Einstein): "Todos los cuerpos de referencia, sin importar su estado de movimiento, son equivalentes para la descripción de las leyes de la naturaleza". (B1, p.67).

Reemplazando en (9)  $\square \phi_{\mu\nu}$  por  $S_{\mu\nu}$  la ecuación del campo gravitatorio es entonces de la forma

$$(12) \quad S_{\mu\nu} = G_H T_{\mu\nu}$$

donde  $G_H$  es la constante de la gravitación de Einstein relacionada con la de Newton por  $G_H = (8\pi/c^2)G_N$ . Despejando  $T_{\mu\nu}$  de (12) y sustituyendo en (11), tenemos

$$(13) \quad \nabla^\mu S_{\mu\nu} = 0$$

Y vamos a dar ahora la interpretación de Einstein de la ecuación (12) así como algunas de sus implicaciones:

- a)  $T_{\mu\nu}$  representa la distribución de energía en el espacio (cinética, de presión, electromagnética, de masa, etc.)
- b)  $S_{\mu\nu}$  representa las propiedades geométricas del espacio-tiempo.
- c) La presencia de la energía produce la estructura geométrica de un espacio-tiempo curvo.

d) Esta estructura geométrica espacio-tiempo constituye el campo gravitatorio con lo que se identifica geometría y gravitación

e) Una partícula lanzada en un campo gravitatorio se mueve libre de "fuerzas". Lo hace a lo largo de una "recta" llamada geodésica (trayectoria espaciotemporal en el espacio de Riemann), camino de mínima longitud entre las "ondulaciones" (curvatura) del espacio-tiempo. La partícula se mueve siguiendo "canales de curvatura" lo que significa que su trayectoria es determinada por las condiciones estructurales del espacio-tiempo en la región de movimiento y no por efecto de acciones a distancia producidas por otros cuerpos.

f) Las longitudes de objetos colocados en campos de gravitación sufren acortamientos permanentes.

g) Los relojes colocados en campos de gravitación marchan más lentamente y sus retardos son permanentes.

Lo importante de un espacio dado (sea de Minkowski, sea de Riemann, etc.) es su métrica, expresión del cuadrado de la longitud elemental  $ds$ . En el espacio de Riemann de la Relatividad Generalizada la métrica viene dada por la suma de 16 términos de la forma  $g_{\mu\nu} dx_{\mu} dx_{\nu}$  donde las  $x_{\mu}$ ,  $x_{\nu}$  representan coordenadas de espacio o de tiempo y las  $g_{\mu\nu}$  los llamados potenciales de gravitación generalizados. El conocimiento de los  $g_{\mu\nu}$  permite determinar las propiedades geométricas del espacio-tiempo. En función de estos  $g_{\mu\nu}$  y de magnitudes  $R_{\mu\nu}$  relacionadas con la curvatura del espacio, la ecuación (12) se escribe

$$(14) \quad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (R - 2\lambda) = G_N T_{\mu\nu}$$

que es la famosa ley de la gravitación de Einstein, en la cual  $R$  es

un escalar de curvatura y  $\Lambda$  es la llamada constante cosmológica. En aquellas regiones donde no existe masa-energía ( $T_{\mu\nu} = 0$ ) la (14) se convierte en

$$(15) \quad R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}$$

ecuación de la gravitación de Einstein para el espacio vacío.

La Teoría de la Gravitación de Einstein es un edificio lógico coherente construido sobre la base del Principio de Relatividad, pero, como toda teoría física, necesita ser confrontada con la realidad para medir su grado de validez. Hasta hoy son muchas las confrontaciones que se han hecho y de todas parece salir airosa la Relatividad Generalizada. Mencionaremos tres de esas confrontaciones, llamada "clásicas": 1) El movimiento planetario, 2) La desviación de un rayo luminoso en un campo de gravitación y 3) Retraso gravitatorio de los relojes.

A) Movimiento planetario. La masa del Sol es la que crea el campo gravitatorio en el interior del cual se mueven los planetas. La masa solar crea la estructura geométrica del espacio a su alrededor. Prescindiendo de los planetas, la región externa al Sol es una región vacía y sus propiedades geométricas estructurales están determinadas por la ecuación (15) la cual puede escribirse

$$(16) \quad R_{\mu\nu} = 0$$

porque la constante cosmológica es prácticamente nula para regiones del tamaño de la del sistema solar. Schwarzschild pudo determinar la métrica de la región externa al Sol con ayuda de (16)

$$(17) \quad ds^2 = - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2$$

en el entorno de un punto del espacio-tiempo (fig.3), donde  $M$ , masa solar;  $G$ , constante gravitacional de Newton;  $c$ , velocidad de la luz;  $\underline{r}, \underline{\theta}, \underline{\phi}$ , las coordenadas espaciales y  $\underline{ct}$  la coordenada temporal.

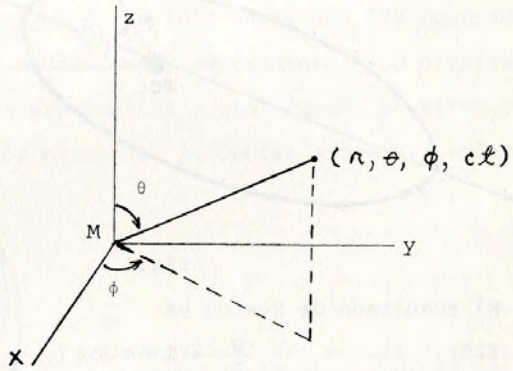


Fig.3

Los coeficientes de  $dr^2$ ,  $d\theta^2$ ,  $d\phi^2$  y  $d(ct)^2$  en (17) son los potenciales de gravitación generalizados  $g_{\mu\nu}$  mencionados anteriormente, los cuales van a permitirnos estudiar el movimiento de los planetas. La masa individual de los planetas es pequeña en comparación a la del Sol y apenas modifica las condiciones geométricas estructurales del espacio creadas por éste, por lo que (17) no se altera. Las ecuaciones de la trayectoria de un planeta en el espacio de Riemann son

$$(18) \quad \frac{d^2 x^\rho}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \mu \nu \end{matrix} \right\} \frac{dx^\mu}{ds} \cdot \frac{dx^\nu}{ds} = 0$$

y sustituyendo en ellas los  $g_{\mu\nu}$  conocidos obtenemos la ecuación de la trayectoria plana puramente espacial del planeta P (fig.4):

$$(19) \quad \frac{P'}{r} = 1 + e \cos(\phi - \phi_0 - \frac{3M^2 G^2}{h^2} \cdot \phi)$$

representando una elipse de excentricidad  $e$  y siendo  $p$  y  $h$  parámetros planetarios.

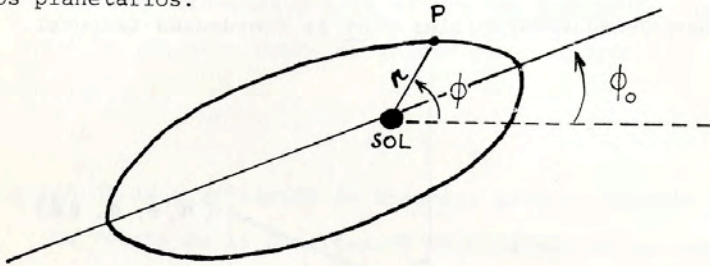


fig.4

El resultado de Newton es

$$(20) \quad \frac{p}{r} = 1 + e \cos(\phi - \phi_0)$$

que representa también una elipse, pero existe una diferencia importante entre (20) y (19). En la solución de Newton el ángulo  $\phi_0$ , que da la orientación del eje mayor de la elipse, es constante, mientras en la solución de Einstein este ángulo varía en función de  $\phi$  puesto que comparando (20) con (19) es claro que la orientación del eje mayor de la elipse de Einstein viene dada por

$$\phi_0' = \phi_0 + \frac{3M^2 G^2}{h^2} \cdot \phi$$

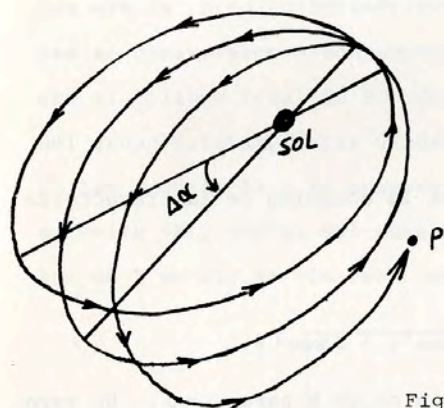
lo que significa que la elipse relativista rota en torno al sol, avanzando una cantidad de segundos de arco por siglo igual a\*

$$(21) \quad \Delta \phi = \frac{30 G M A 60^4}{a T c^2 (1 - e^2)^2}$$

donde:  $A$ ,  $T$  períodos de revolución de la Tierra y del planeta considerado, respectivamente, en días siderales;  $a$ , semieje mayor de la elipse.

\* (B3), (B4), (B5)

El planeta relativista se mueve como en la fig. 5, y este movimiento ha sido observado en el planeta Mercurio cuyo perihelio (punto de la órbita más cercano al Sol) rota avanzando 572 segundos de arco por siglo según se ha medido experimentalmente. La gravitación newtoniana, buscando una explicación a ese avance, lo atribuyó a la perturbación que los otros planetas producían sobre Mercurio y



$\Delta\alpha$  = ángulo girado por el semieje mayor de la elipse en dos revoluciones del planeta.

Fig. 5

calculándola, encontró un avance de 529 segundos de arco por siglo. La diferencia, pues, entre el valor observado y el calculado era de 43 segundos de arco por siglo y no hubo manera de explicarse esta diferencia hasta Einstein pues con los valores de  $a$ ,  $T$  y  $e$  conocidos para Mercurio se ha calculado con (21) el avance relativista del perihelio sin tener en cuenta la perturbación de los demás planetas, y el resultado ha sido de 43.15 segundos de arco por siglo, valor muy aproximado a la diferencia de 43 segundos de arco por siglo mencionada anteriormente. Esta diferencia, pues, era debida a un efecto gravitacional relativista. Esta fue la primera prueba en favor de la Relatividad Generalizada.

B) Desviación gravitatoria de la luz. En razón de la equivalencia entre masa y energía, los rayos luminosos, compuestos de minúsculos paquetes de energía llamados fotones, deben ser "atraídos" por masas gravitatorias. (fig.6). La característica fundamental del rayo luminoso es que su intervalo espaciotemporal elemental  $ds$  es nulo

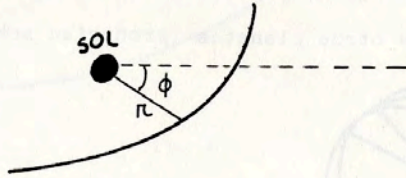
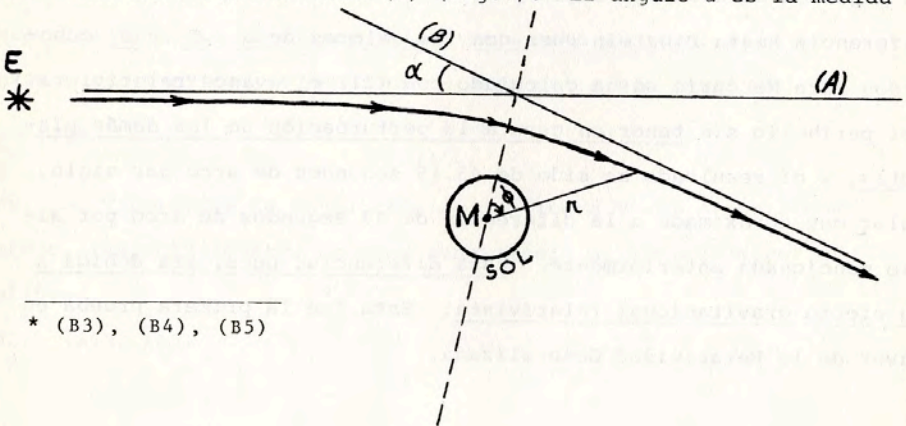


Fig.6

Considerando esto en (18), se obtiene la ecuación de la trayectoria puramente espacial del rayo\*:

$$(22) \quad \frac{1}{r} = \frac{\cos \phi}{R} + \frac{GM}{c^2 R^2} (\cos^2 \phi + 2 \operatorname{sen}^2 \phi)$$

donde  $R$  es aproximadamente igual al valor de  $r$  para  $\phi = 0$ . Un rayo que venga de una estrella lejana  $E$  en la dirección de la recta (A) es curvado en la cercanías del Sol y luego sigue viaje al infinito en la dirección de la recta (B) (fig.7). El ángulo  $\alpha$  es la medida



\* (B3), (B4), (B5)



de la desviación del rayo por el campo gravitatorio solar y viene dado por

$$(23) \quad \alpha = \frac{4 GM}{c^2 R}$$

Para un rayo luminoso que pasa al borde del Sol, ese ángulo, según (23), es de 1.75 segundos de arco (recordamos: G, constante gravitacional de Newton; M, masa solar; c, velocidad de la luz). Esa era la predicción teórica de Einstein. Los astrónomos ingleses se apresuraron a confrontarla con la realidad aprovechando para eso el eclipse total de Sol del 29 de mayo de 1919 en la dirección del grupo estelar de las Híades, en la constelación del Toro. En las figuras 8A y 8B aparece la región de las Híades con una sola estrella (E), con el Sol ausente y presente, respectivamente. La luz de E en fig.8A la recibimos según visual (A) de la fig.7 y

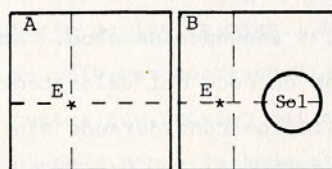


Fig.8

la de la misma estrella en fig.8B según visual (B) de la fig.7. La única posibilidad de observar E en la situación de la fig.8B es sólo con el Sol eclipsado. La fig.9 ilustra mejor la observación desde la tierra.

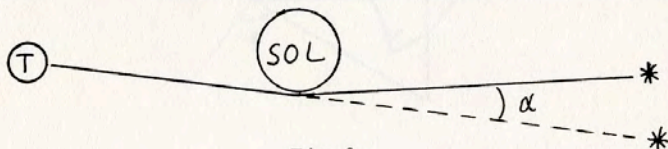


Fig.9

Dos expediciones científicas inglesas salieron para el Ecuador a observar el eclipse del 29 de mayo de 1919: un grupo dirigido por A. S. Eddington se instaló en la Isla del Príncipe (Golfo de Guinea) y el otro, dirigido por A. C. Crommelin, viajó a la villa brasileña de Sobral (fig.10). Según cuenta Phillippe Frank en (B7), a la llegada del grupo de Crommelin a esta ciudad, un periódico brasileño expresaba su deseo, un poco burlesco, de que sería mucho mejor que los astrónomos ingleses hicieran llover sobre la región para mitigar la larga sequía, en lugar de ponerse a comprobar una teoría científica. Curiosamente, la lluvia comenzó a caer varios días después de la llegada del grupo...

Pues bien, los valores de la desviación del rayo luminoso hallados por Eddington y Crommelin fueron 1.60 y 1.98 segundos de arco, respectivamente, con un valor promedio de 1.79. El valor teórico hallado con (23) es de 1.75 segundos de arco. Ambos valores experimentales, aunque se alejan un poco del valor teórico, uno por defecto y el otro por exceso, fueron considerados sin embargo, como prueba de la desviación angular teórica. Más tarde, estudiando los resultados de varios eclipses,\* se estableció un valor experimental de 1.79 segundos de arco, el cual permitió concluir, sin ninguna duda, en la confirmación experimental de la predicción angular de la desviación del rayo luminoso, lo que viene a ser una prueba más en favor de la validez de la Relatividad Generalizada.

\* (B4)

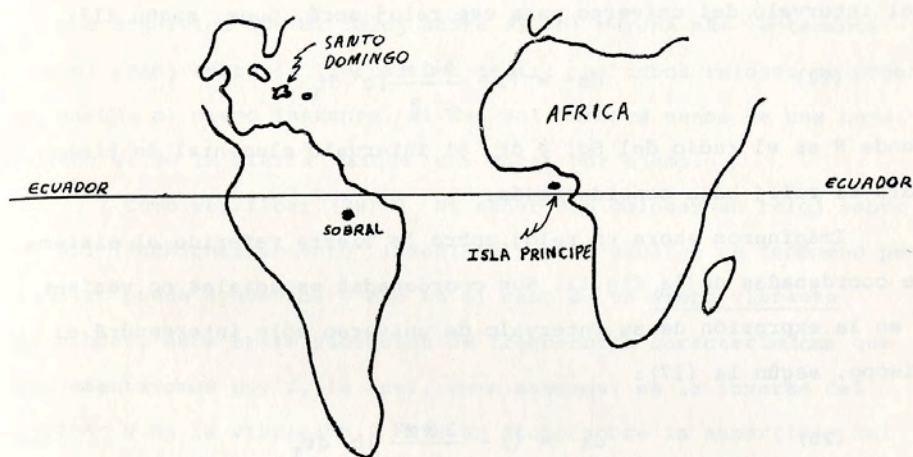


fig. 10

C) Retraso gravitatorio de los relojes. La raíz cuadrada de la (17) es el intervalo de universo correspondiente a un suceso que se desarrolla entre dos puntos muy próximos del espaciotiempo. Para un reloj colocado en el punto P sobre la superficie del Sol (fig.11) sus coordenadas espaciales  $r = R, \theta, \phi$  no varían; el suceso en ese

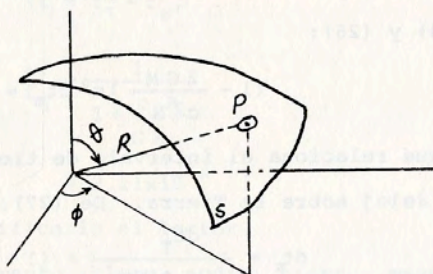


fig.11

punto P consiste únicamente en el "flujo de tiempo". El cuadrado del intervalo del universo para ese reloj será, pues, según (17),

$$(24) \quad ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 R}\right) c^2 dt_s^2$$

donde R es el radio del Sol y  $dt_s$  el intervalo elemental de tiempo para el reloj bajo consideración.

Imaginemos ahora un reloj sobre la Tierra referido al sistema de coordenadas de la fig.11. Sus coordenadas espaciales no varían\* y en la expresión de su intervalo de universo sólo intervendrá el tiempo, según la (17):

$$(25) \quad ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_T}\right) c^2 dt_T^2$$

donde:  $r_T$ , distancia del Sol a la Tierra;  $dt_T$  intervalo de tiempo en el reloj situado sobre la Tierra. Sustituyendo en el paréntesis los valores de G, M, c,  $r_T$ , veremos que ese paréntesis es muy aproximadamente igual a 1, por lo que (25) se convierte en

$$(26) \quad ds^2 = c^2 dt_T^2$$

Pero en Relatividad Generalizada el  $ds$  es un invariante (el mismo para todos los puntos del espaciotiempo), lo que nos permite igualar (24) y (26):

$$(27) \quad \left(1 - \frac{2GM}{c^2 R}\right) c^2 dt_s^2 = c^2 dt_T^2$$

expresión que relaciona el intervalo de tiempo del reloj sobre el Sol con el reloj sobre la Tierra. De (27),

$$(28) \quad dt_s = \frac{dt_T}{1 - \frac{2GM}{c^2 R}} \approx \left(1 + \frac{GM}{c^2 R}\right) dt_T$$

\*En realidad la Tierra está moviéndose, pero este movimiento se desprecia para simplificar.

lo que significa que el reloj sobre el Sol marcha más lentamente - que el reloj sobre la Tierra; es decir: si ambos relojes se ponen en marcha al mismo instante, el del Sol marcará menos de una hora cuando el de la Tierra marque una hora, por ejemplo.

¿ Como verificar (28) ? Ni soñar con colocar un reloj sobre el Sol ("achicharramiento" inmediato). Sin embargo un fenómeno periódico puede ayudarnos y ese es el caso de un átomo vibrante. Al vibrar, éste emite radiación de frecuencias características que representaremos por  $f$ , la cual, como sabemos, es la inversa del período  $T$  de la vibración. Para un átomo sobre la superficie del Sol,  $T_S = 1/f_S$  y para otro átomo del mismo tipo pero sobre la superficie de la Tierra  $T_T = 1/f_T$  donde  $T_S$  y  $T_T$  están relacionados por (28); es decir

$$T_S \approx \left(1 + \frac{GM}{c^2 R}\right) T_T$$

lo que implica

$$f_T \approx \left(1 + \frac{GM}{c^2 R}\right) f_S$$

y definiendo

$$\Delta f = f_T - f_S,$$

$$(29) \quad \frac{\Delta f}{f_T} = \frac{1}{1 + \frac{c^2 R}{GM}}$$

$$\approx 2.11 \times 10^{-6}$$

como puede fácilmente verificarlo el lector.

Ahora bien. Un elemento (cloro, sodio, hierro, magnesio, etc) al ser calentado emite luz que al analizarse en un espectroscopio (fig.12) da lugar a un espectro óptico característico del elemento.

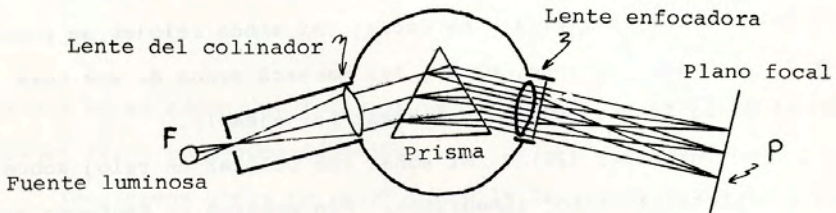


Fig. 12

(Tomada de (B 8))

pantalla P. La fig.13A muestra el espectro de líneas de un elemento E al ser colocado caliente en el lugar F de la fig.12.

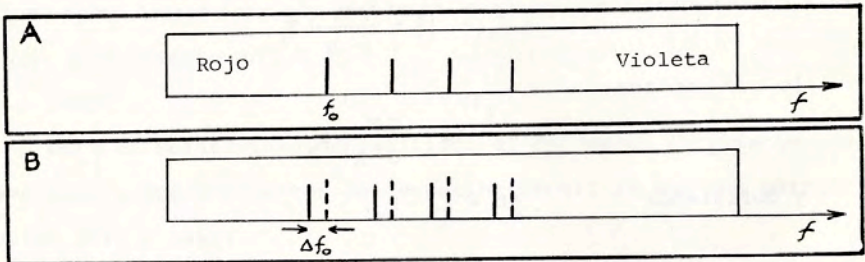


Fig. 13

En la fig.13B aparece el espectro del mismo elemento E separado de los espectros de otros elementos al analizar la luz procedente del Sol en el espectroscopio. El  $\Delta f_0$  de (29) es el señalado en la fig.13A.

Teóricamente, este procedimiento permite hallar el valor experimental de (29). En realidad los detalles experimentales son más complicados en razón de que la pequeñez del efecto a medir requiere

alta precisión. Esta pudo ser lograda por la científica inglesa M. G. Adam quien con métodos interferométricos pudo hallar el siguiente valor experimental de (29):

$$\left(\frac{\Delta f}{f}\right)_{\text{exp}} = 2.1348 \times 10^{-7}$$

en excelente acuerdo con la predicción teórica. Este resultado, aparecido en 1962, vino a reforzar la confirmación experimental del retraso gravitatorio de los relojes establecido por primera vez en 1925 por el físico norteamericano W. S. Adams al analizar espectralmente la luz procedente de la pequeña estrella masiva compañera de Sirio.

El mismo efecto pudo medirse estudiando el cambio de frecuencia de rayos gamma al desplazarse en el campo gravitatorio terrestre entre dos puntos a muy corta distancia (unos 12 metros). El acuerdo de la teoría y la experiencia fue excelente en este caso.

El retraso gravitatorio de los relojes quedó pues confirmado sin ninguna duda.

Y aquí terminamos esta larga exposición sobre la Relatividad Generalizada. Espero amigo lector, haber podido mostrarte con claridad las ideas esenciales de esa teoría física corrientemente juzgada como "muy difícil".

Varios asuntos fueron tratados muy someramente y otros, como la naturaleza no-euclídea del espacio físico y los modelos cosmológicos relativistas, fueron lamentablemente excluidos. De todo eso han sido responsables las inevitables restricciones "canónicas" del "espacio periodístico".

BIBLIOGRAFIA

- (B1) Einstein, A.- "La theorie de la Relativité Restreinte et Générale", Gauthier-Villars, Paris, 1871.
- (B2) Einstein, A y Infeld, L.- "La Física: Aventura del Pensamiento", Losada, Buenos Aires, 1965.
- (B3) Tonnelat, M. A.- "Les verifications experimentales de la Relativité Generale", Masson, Paris, 1964.
- (B4) Mavrides, S.- "L'Univers relativiste", Masson, Paris, 1973.
- (B5) Andriolat, H.- "Introduction a l'étude des Cosmologies", Armand Colin, Paris, 1970.
- (B6) Langevin, P.- "Introducción a la Relatividad", Ediciones Leviatán, Buenos Aires, 1976.
- (B7) Frank, P.- "Einstein: sa vie et son temps", Albin Michel, Mayenne (France), 1968.
- (B8) Blackwood, O.; Kelly, W; Bell, R.- "Física General", C. E. S. A., México, 1978.
- (B9) Kahan, T.- "Physique Theorique", tomo I, Vol. II, Presses universitaires de France, Paris, 1960.
- (B10) Einstein, A.- "Significado de la Relatividad", Espasa Calpe, Madrid, 1971.
- (B11) Landau, L; Lifshitz, E.- "Teoría Clásica de los Campos", Reverté, Barcelona (España), 1966.