APLICACION DE LOS POLINOMIOS DE TCHEBYCHEFF PARA CALCULAR CIERTAS INTEGRALES POR COMPUTADOR

Por Ing. David Osejo Vanegas

Deseamos calcular el valor de la integral $I = \int_{-1}^{+1} 1 + x \text{ sen } x \, dx$.

Nuestro primer reflejo es buscar si dicha integral posee una primitiva conocida, si no la encontramos tratamos de calcularla, si no se consigue se puede probar un desarrollo en serie o el método de residuos, etc.

Desgraciadamente, ninguno de los métodos analíticos (a menos que un genial espíritu renovador aparezca por ahí) nos puede sacar del apuro. Sin embargo, apenas nacía el siglo XX cuando el hombre supo crear un fiel amigo: el computador; "con tu fuerza y con mi inteligencia venceremos" (célebre frase dictada por obelix a su fiel compañero idéfix*).

Para calcular $I = \int_{a}^{b} f(x) \, dx$ utilizando el computador, existen muchos métodos, cada uno de ellos introduce sistemáticamente un error.

Si A es el valor calculado utilizando un método, el error que se comete es:

$E_m = A - I$, donde I es el valor exacto de la integral.

Se demuestra en análisis numérico que el error cometido utilizando el método de los trapecios es $\frac{(b - a)}{12} \times \quad a,b \quad f''(x)$.

La dificultad que se presenta con la función $f(x) = 1 + x$ sen es que el maximum de su derivada segunda en el intervalo $-1,+1$ es infinito, por lo cual el error no se puede calcular, lo que impide utilizar dicho método clásico para conocer el valor de la integral correspondiente.

---

* Dos personajes cómicos imaginarios de Francia.

Gracias a los polinomios de Tchebycheff veremos como se puede utilizar el método de los trapecios esquivando el inconveniente anterior.

Desarrollo de una función en Series de Tchebycheff

Bajo ciertas condiciones, análogas a las que existen para desarrollar una función en Series de Fourier, una función puede desarrollarse en series de Tchebycheff. Nos limitaremos a hacer la aplicación:

Sea $f(x) = 1 + x\, g(x)$, $g(x) = \text{sen}\, x$.

El desarrollo en series de Tchebycheff de la función es:

$$g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k T_k(x)$$

donde $$a_k = \frac{\int_{-1}^{+1} \frac{g(x)\, T_n(x)}{1 - x^2}\, dx}{\int_{-1}^{+1} \frac{T_n^2(x)}{1 - x^2}\, dx} \quad \text{y } T_k(x) = \cos(k \arccos x).$$

En el caso $g(x) = \text{sen}\, x$ se tiene que(1):

$$\int_{-1}^{+1} \frac{g(x)\, T_{2k}(x)}{1 - x^2}\, dx = 0.$$ Por tanto la serie se reduce a:

$$\text{sen}\, x = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k+1} T_{2k+1}(x).$$

---

(1) Los polinomios de Tchebycheff T_n son funciones pares para n par. Por ejemplo $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$, $T_2(x) = 2x^2 - 1$.

(2) En este caso se puede probar que $\int_{-1}^{+1} \sum_{k=1}^{+\infty} = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{-1}^{+1}$.

y en consecuencia,

$$f(x) = \sqrt{1+x}\ \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k+1}\ T_{2k+1}(x).$$

Por tanto,

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\, dx = \sum_{k=1}^{+\infty} a_{2k+1} \int_{-1}^{+1} T_{2k+1}(x)\ \sqrt{1+x}\ dx^{(2)}$$

Esta expresión se vuelve más bonita haciendo el cambio de variable $x = \cos\theta$ obteniéndose

$$B_{2k+1} = \int_{-1}^{+1} T_{2k+1}(x)\ \sqrt{1+x}\ dx = 2\int_{0}^{\pi} \cos(2k+1)\theta \cos\frac{\theta}{2} \operatorname{sen}\theta\, d\theta$$

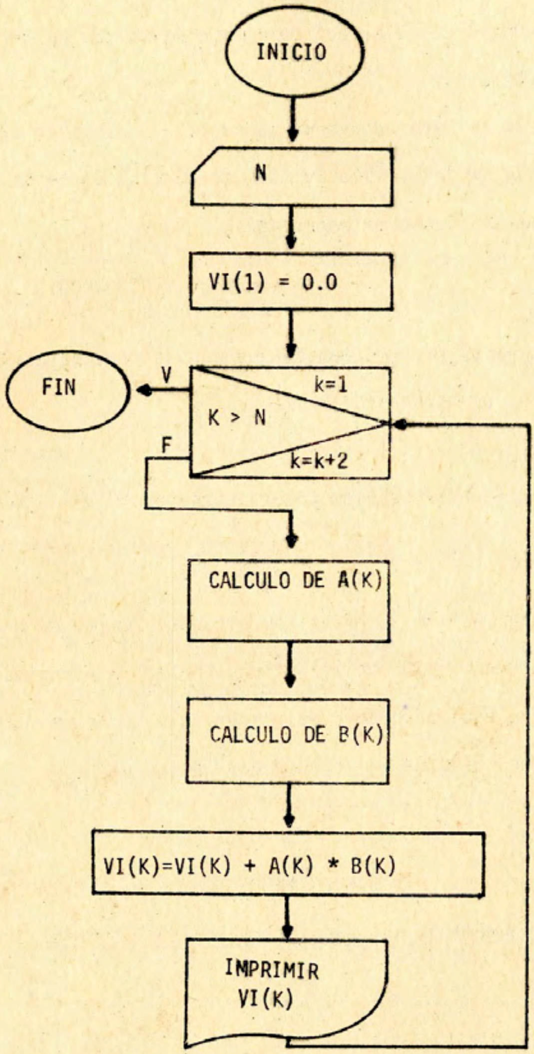
y,

$$a_{2k+1} = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \operatorname{sen}(\cos\theta)\cos(2k+1)\theta\, d\theta.$$

Luego,

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\, dx = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k+1}\, B_{2k+1}$$

Notemos que a_{2k+1} y B_{2k+1} pueden ser calculados utilizando el método del trapecio. El diagrama de flujo utilizado es el siguiente:


INICIO
N
VI(1) = 0.0
FIN
V
k=1
K > N
F
k=k+2
CALCULO DE A(K)
CALCULO DE B(K)
VI(K)=VI(K) + A(K) * B(K)
IMPRIMIR
VI(K)

El lenguaje de programación utilizado es el Fortran IV.

Una vez efectuado el cálculo, nos damos cuenta que el método de los Trapecios es un excelente método.

Por otro lado, la integral converge cuando $k \geq 5$, en este hecho interesante reside la importancia de la utilización del desarrollo en Series de Tchebycheff, pues permite economizar un tiempo extraordinario.

$$\int_{-1}^{+1} 1 + x \quad \text{sen } x \, dx \simeq 0{,}338993.$$

Se puede controlar el error cometido, pues este depende de la aproximación con que se comete sen x, es decir, si:

$$|\text{sen } x - \Sigma\, a_k\, T_k(x)| < \varepsilon$$

ε función de k, $\varepsilon(k)$. Conociendo este error, entonces:

$$|I - A| \leq \varepsilon \int_{-1}^{+1} 1 + x \, dx = \frac{4}{3}\varepsilon.$$

Por ejemplo, para $\varepsilon = 10^{-6}$, prácticamente este límite es mucho más que suficiente. No abordaremos aquí este delicado problema de la aproximación, pero no cabe duda que sin una evaluación previa del error, el uso de un método no sería justificado; no olvidemos: "de la reflexión nace la acción".

BIBLIOGRAFIA

P. Pelletier. Técnicas numéricas aplicadas al cálculo científico. (Masson et Cie).